

# 圆弧曲线段和球面曲面片的多项式逼近

郭清伟

(复旦大学 数学所, 上海 200433) (合肥工业大学理学院, 合肥 230009)

**摘要** 鉴于现有的 CAD/CAM 造型系统不能处理圆和球面的隐式方程以及用三角函数所表示的参数方程, 因此为了使得现有的 CAD/CAM 造型系统能够处理圆弧、圆以及球面曲面片、球面, 人们只能采用参数多项式和参数有理多项式来逼近它们。为了能更好地对圆弧曲线段和球面曲面片进行逼近, 提出了一种基于最小二乘范数的参数 Bézier 多项式逼近方法。该方法根据在最小二乘范数  $L_2$  下所定义的距离函数取最小值, 首先得到了一个圆弧曲线段和球面曲面片的参数 Bézier 多项式逼近式, 并把该逼近多项式表示成两个行列式的商的形式。如果所取圆弧曲线段或球面曲面片为圆或球面时, 则可得到圆或球面的参数 Bézier 多项式逼近式。另外, 用该方法也可得到椭圆弧曲线段和椭球面曲面片的参数 Bézier 多项式逼近式。最后给出了一些数值实例, 数值实验结果表明, 该方法是有效的。

**关键词** 圆弧曲线段 球面曲面片 Bézier 多项式 逼近

**中图分类号:** TP391.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-8961(2007)01-0153-06

## The Polynomial Approximants for Circular Segments and Spherical Patches

GUO Qing-wei

(Institute of Mathematics, Fudan University, Shanghai 200433) (Department of Mathematics, Hefei University of Technology, Hefei 230009)

**Abstract** Modern CAD/CAM systems do not dispose the circle and the sphere represented by the implicit equation and the parameter equation with trigonometric function. Ones approximate the circular arc and the circle as well as the spherical surface and the sphere by using the parameter polynomial and parameter rational polynomial such that they can be disposed by the modern CAD/CAM systems. In order to effectively approximate the circular arc and the circle as well as the spherical surface and the sphere, the parameter Bézier form polynomial approximants of circular segments and spherical patches are obtained by minimizing the defined distance function with respect to the best least squares norms  $L_2$ . Meanwhile these approximants are expressed as the quotient of two determinants. If the circular segment or the spherical patch to be approximated is a full circle or a sphere, The parameter Bézier form polynomial approximants of a full circle or a sphere can be given by the same process. Furthermore, by using this paper's method, The parameter Bézier form polynomial approximants of elliptic arcs and ellipsoid patches can be presented. Finally we show some graphical examples in order to prove the validity of our method.

**Keywords** circular segment, spherical surface, Bézier polynomial, approximation

## 1 引言

圆弧和圆以及球面曲面片和球面都是几何造型中的基本而重要的曲线曲面形状, 因为已有的 CAD/CAM 造型系统只能处理多项式和有理多项式,

所以圆和球面的隐式方程以及用三角函数所表示的参数方程与 CAD/CAM 造型系统是不相容的, 为了使圆弧和圆以及球面曲面片和球面的表示符合 CAD/CAM 造型系统的要求, 多年来, 人们从未间断过这方面的研究工作, 国内研究者的工作主要集中在用低次有理 Bézier 曲线段和 NURBS 曲线来精确表示圆

基金项目: 国家自然科学基金项目(60473114)

收稿日期: 2005-01-19; 改回日期: 2005-11-24

第一作者简介: 郭清伟(1968 ~ ), 男, 2003 年获中国科学技术大学博士学位, 现为复旦大学数学所博士后研究人员, 合肥工业大学副教授。主要研究方向为计算机辅助几何设计、数值逼近等。E-mail: gyxm0299@sina.com, qwguo-hffd@sohu.com

弧曲线段和圆,其所取得的部分成果见参考文献[1~9];国外的研究者不仅研究了用低次有理 Bézier 曲线段和 NURBS 曲线来精确表示圆弧曲线段和圆,而且研究了用低次组合 Bézier 曲线逼近圆弧曲线段和圆,其主要成果已在文献[10]中的参考文献中列出。文献[10]给出了用一条有理参数 Gaussian 曲线段和一片有理参数 Gaussian 曲面片来逼近整圆和整个球面的方法,并指出由一片 NURBS 曲面或一片有理 Bézier 曲面只能生成整个球面的一部分,而由一片 NURBS 曲面或一片有理 Bézier 曲面生成整个球面的方法则还是一个未解决的问题。另外,因为有理 Gaussian 曲线和有理 Gaussian 曲面中含有形如  $\exp\left\{-\frac{(u-u_i)^2}{2\sigma^2}\right\}$  的函数,所以由文献[10]中的方法所得到的整圆和整个球面的近似表示式与 CAD/CAM 造型系统是不相容的,不能被 CAD/CAM 造型系统采用。

本文先利用在最小二乘范数下所定义的距离函数取最小值来得到圆弧曲线段和球面曲面片的 Bézier 形式的参数多项式逼近,然后把所得到的多项式逼近曲线和曲面表示成行列式的商,同时指出该方法也可得到整圆和整个球面的参数多项式逼近式,即可用一条参数 Bézier 曲线去逼近一个整圆和可用一片参数量积 Bézier 曲面片去逼近一个整球面。

## 2 圆弧曲线段的多项式逼近

由于圆心在  $(x_c, y_c)$  点(下角 c 代表 center),半径为  $r$  的圆  $(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 = r^2$ ,均可通过坐标平移和缩放变为圆心在坐标原点的单位圆,因此,本文仅考虑圆心在坐标原点的单位圆上的圆弧曲线段的多项式逼近。

设待逼近的圆弧曲线段  $L$  的参数方程为

$$\begin{cases} x(\theta) = \cos(\theta) \\ y(\theta) = \sin(\theta) \end{cases} \theta \in [\alpha, \beta], 0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi \quad (1)$$

令  $\theta = \alpha + (\beta - \alpha)u$ , 则  $\theta \in [\alpha, \beta]$  时,  $u \in [0, 1]$ , 式(1)可变为

$$\begin{cases} x(u) = \cos[\alpha + (\beta - \alpha)u] \\ y(u) = \sin[\alpha + (\beta - \alpha)u] \end{cases} u \in [0, 1] \quad (2)$$

则可用  $n$  次平面参数 Bézier 曲线  $P(u) = \sum_{i=0}^n p_i B_i^n(u)$ ,  $u \in [0, 1]$  来逼近圆弧曲线段  $L(u)$ (为了强调圆弧曲线段  $L$  的参数是  $u$ , 把  $L$  记为  $L(u)$ )。其中  $p_i = (p_i^x, p_i^y)$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) 待定,  $B_i^n(u) =$

$C_n^i u^i (1-u)^{n-i}$  为  $n$  次 Bernstein 多项式基函数。

下面给出确定  $p_i = (p_i^x, p_i^y)$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) 的方法。

若将圆弧曲线段  $L(u)$  与曲线  $P(u)$  在  $L_2$  范数下的距离函数定义为

$$d(L(u), P(u)) = \sqrt{\int_0^1 |L(u) - P(u)|^2 du} \quad (3)$$

其中,  $L(u) = (x(u), y(u))$ 。

则满足式(4)的  $p_i = (p_i^x, p_i^y)$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) 即为所求。

$$d(L(u), P(u)) = \sqrt{\int_0^1 |L(u) - P(u)|^2 du} = \min \quad (4)$$

易见,式(4)与式(5)等价

$$d^2(L(u), P(u)) = \int_0^1 |L(u) - P(u)|^2 du = \min \quad (5)$$

若  $p_i = (p_i^x, p_i^y)$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) 满足式(5), 则应有

$$\frac{\partial d^2(L(u), P(u))}{\partial p_i^x} = 0, i = 0, 1, \dots, n \quad (6)$$

$$\frac{\partial d^2(L(u), P(u))}{\partial p_i^y} = 0, i = 0, 1, \dots, n \quad (7)$$

可把式(6)与式(7)化简,并写成以下矩阵乘积的形式

$$AP_x = L_x \quad (8)$$

$$AP_y = L_y \quad (9)$$

其中,  $A = (a_{i,j})_{i=0, j=0}^{n,n}$

$$a_{i,j} = \int_0^1 B_i^n(u) B_j^n(u) du = \frac{C_n^i C_n^j}{(2n+1) C_{2n}^{i+j}}$$

$$P_x = (p_0^x, p_1^x, \dots, p_n^x)^T, P_y = (p_0^y, p_1^y, \dots, p_n^y)^T$$

$$L_x = (l_{0,x}, l_{1,x}, \dots, l_{n,x})^T$$

$$L_y = (l_{0,y}, l_{1,y}, \dots, l_{n,y})^T$$

$$l_{i,x} = \int_0^1 \cos[\alpha + (\beta - \alpha)u] B_i^n(u) du, i = 0, 1, \dots, n$$

$$l_{i,y} = \int_0^1 \sin[\alpha + (\beta - \alpha)u] B_i^n(u) du, i = 0, 1, \dots, n$$

(由于  $B_i^n(u)$  为  $n$  次多项式,故  $l_{i,x}, l_{i,y}$  均可通过分步积分法精确地计算出来)

因为  $B_0^n(u), B_1^n(u), \dots, B_n^n(u)$  线性无关,且由文献[11]知矩阵  $A$  为可逆方阵,故根据式(8)与式(9)

可得,由曲线  $P(u) = \sum_{i=0}^n p_i B_i^n(u)$  ( $u \in [0, 1]$ ) 的控制顶点的两个分量构成的向量  $P_x$  与  $P_y$  分别为

$$P_x = A^{-1}L_x, P_y = A^{-1}L_y \quad (10)$$

记  $B = (B_0^n(u), B_1^n(u), \dots, B_n^n(u))$ , 由式(10)得到的逼近曲线  $P(u)$  的两个分量多项式  $P_x(u)$  与  $P_y(u)$  分别为

$$P_x(u) = BP_x = BA^{-1}L_x \quad (11)$$

$$P_y(u) = BP_y = BA^{-1}L_y \quad (12)$$

根据逆矩阵与伴随矩阵的关系以及 Laplace 展开定理,由式(11)与式(12)可得

$$P_x(u) = \frac{-\det A_x}{\det A}, P_y(u) = \frac{-\det A_y}{\det A} \quad (13)$$

其中,

$$A_x = \begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,n} & l_{0,x} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & l_{1,x} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,0} & a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} & l_{n,x} \\ B_0^n(u) & B_1^n(u) & \cdots & B_n^n(u) & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_y = \begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,n} & l_{0,y} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & l_{1,y} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,0} & a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} & l_{n,y} \\ B_0^n(u) & B_1^n(u) & \cdots & B_n^n(u) & 0 \end{pmatrix}$$

由式(13)所得的逼近曲线  $P(u) = \sum_{i=0}^n p_i B_i^n(u)$  ( $u \in [0,1]$ ),一般不插值于被逼近曲线的端点,如果先取定  $p_0 = (p_0^x, p_0^y) = L(0) = (x(0), y(0))$ ,  $p_n = (p_n^x, p_n^y) = L(1) = (x(1), y(1))$ ,则仿照式(13)的推导过程,即可得式(14),然后根据式(14)所确定的逼近曲线插值于被逼近曲线的端点。

$$\begin{cases} \tilde{P}_x(u) = \frac{-\det \tilde{A}_x}{\det A_1} + p_0^x B_0^n(u) + p_n^x B_n^n(u) \\ \tilde{P}_y(u) = \frac{-\det \tilde{A}_y}{\det A_1} + p_0^y B_0^n(u) + p_n^y B_n^n(u) \end{cases} \quad (14)$$

其中,  $A_1$  为矩阵  $A$  去掉第 1 行和第  $n+1$  行以及第 1 列和第  $n+1$  列后所构成的  $(n-1) \times (n-1)$  阶子矩阵。

$$\tilde{A}_x = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & \tilde{l}_{1,x} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} & \tilde{l}_{2,x} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & \tilde{l}_{n,x} \\ B_1^n(u) & B_2^n(u) & \cdots & B_{n-1}^n(u) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}_y = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & \tilde{l}_{1,y} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} & \tilde{l}_{2,y} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & \tilde{l}_{n,y} \\ B_1^n(u) & B_2^n(u) & \cdots & B_{n-1}^n(u) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{l}_{1,x} = \int_0^1 (\cos[\alpha + (\beta - \alpha)u] - p_0^x B_0^n(u) -$$

$$p_n^x B_n^n(u)) B_i^n(u) du, i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$\tilde{l}_{1,y} = \int_0^1 (\sin[\alpha + (\beta - \alpha)u] - p_0^y B_0^n(u) -$$

$$p_n^y B_n^n(u)) B_i^n(u) du, i = 1, 2, \dots, n-1$$

注:(1)若把式(1)换成椭圆弧参数方程,则可得到相应椭圆弧的参数 Bézier 多项式逼近。(2)若取  $\alpha = 0, \beta = 2\pi$  时,则由式(14)可得到整圆的多项式逼近。

### 3 球面曲面片的多项式逼近

与圆弧曲线段的多项式逼近相类似,此处也可仅考虑球心在坐标原点的单位球面上的曲面片的多项式逼近。

设要逼近的球面曲面片  $S$  的参数方程为

$$\begin{cases} x(\theta, \varphi) = \cos\theta \sin\varphi & (\theta, \varphi) \in [\alpha, \beta] \times [\xi, \eta] \\ y(\theta, \varphi) = \sin\theta \sin\varphi & 0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi \\ z(\theta, \varphi) = \cos\varphi & 0 \leq \xi < \eta \leq \pi \end{cases} \quad (15)$$

令  $\theta = \alpha + (\beta - \alpha)u$ , 则  $\theta \in [\alpha, \beta]$  时,  $u \in [0,1]$ ; 令  $\varphi = \xi + (\eta - \xi)v$ , 则  $\varphi \in [\xi, \eta]$  时,  $v \in [0,1]$ , 此时,式(15)可变为

$$\begin{cases} x(u, v) = \cos[\alpha + (\beta - \alpha)u] \sin[\xi + (\eta - \xi)v] \\ y(u, v) = \sin[\alpha + (\beta - \alpha)u] \sin[\xi + (\eta - \xi)v] \\ z(u, v) = \cos[\xi + (\eta - \xi)v] \end{cases} \quad (u, v) \in [0,1] \times [0,1] \quad (16)$$

用  $n \times m$  次张量积参数 Bézier 曲面  $Q(u, v) =$

$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m q_{i,j} B_i^n(u) B_j^m(v)$  ( $(u, v) \in [0,1] \times [0,1]$ ) 来逼近球面曲面片  $S(u, v)$  (为了强调球面曲面片  $S$  的参数是  $u$  和  $v$ , 故把  $S$  记为  $S(u, v)$ )。其中,  $q_{i,j} = (q_{i,j}^x, q_{i,j}^y, q_{i,j}^z)$  ( $i = 0, 1, \dots, n, j = 0, 1, \dots, m$ ) 待定,  $B_j^m(v)$  ( $j = 0, 1, \dots, m$ ) 为  $m$  次 Bernstein 多项式基函数。

下面给出确定  $q_{i,j} = (q_{i,j}^x, q_{i,j}^y, q_{i,j}^z)$  ( $i = 0, 1, \dots, n, j = 0, 1, \dots, m$ ) 的方法。

球面曲面片  $S(u, v)$  与曲面  $Q(u, v)$  在  $L_2$  范数下的距离函数定义为

$$d(S(u, v), Q(u, v)) = \sqrt{\int_0^1 \int_0^1 |S(u, v) - Q(u, v)|^2 dudv} \quad (17)$$

其中,  $S(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ 。

与求圆弧曲线段的逼近多项式曲线的控制顶点相类似,满足式(18)的  $q_{i,j}$  ( $i = 0, 1, \dots, n, j = 0, 1, \dots, m$ ),即为所求。

$$d^2(S(u, v), Q(u, v)) = \int_0^1 \int_0^1 |S(u, v) - Q(u, v)|^2 dudv = \min \quad (18)$$

如果  $q_{i,j} = (q_{i,j}^x, q_{i,j}^y, q_{i,j}^z)$ ,  $(i=0,1,\dots,n, j=0,1,\dots,m)$  满足式(18), 则应有

其中

$$\frac{\partial d^2(S(u,v), Q(u,v))}{\partial q_{i,j}^x} = 0, i=0,1,\dots,n, j=0,1,\dots,m \quad (19)$$

$$\frac{\partial d^2(S(u,v), Q(u,v))}{\partial q_{i,j}^y} = 0, i=0,1,\dots,n, j=0,1,\dots,m \quad (20)$$

$$\frac{\partial d^2(S(u,v), Q(u,v))}{\partial q_{i,j}^z} = 0, i=0,1,\dots,n, j=0,1,\dots,m \quad (21)$$

把式(19)和式(20)以及式(21)化简写成以下矩阵乘积的形式

$$C_x = \begin{pmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & \dots & c_{0,m} & k_{0,x} \\ c_{1,0} & c_{1,1} & \dots & c_{1,m} & k_{1,x} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m,0} & c_{m,1} & \dots & c_{m,m} & k_{m,x} \\ B_0^n(v) & B_1^n(v) & \dots & B_m^n(v) & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_y = \begin{pmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & \dots & c_{0,m} & k_{0,y} \\ c_{1,0} & c_{1,1} & \dots & c_{1,m} & k_{1,y} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m,0} & c_{m,1} & \dots & c_{m,m} & k_{m,y} \\ B_0^n(v) & B_1^n(v) & \dots & B_m^n(v) & 0 \end{pmatrix}$$

$$A Q_x C = L_x K_x^T, A Q_y C = L_y K_y^T, A Q_z C = L_z K_z^T \quad (22)$$

其中  $A, L_x, L_y$  与式(8)和式(9)中的含义相同

$A_x$  和  $A_y$  与式(13)中的含义相同。

$$C = (c_{i,j})_{i=0,j=0}^{m,m}, c_{i,j} = \int_0^1 B_i^n(v) B_j^n(v) dv = \frac{1}{2m+1} \frac{C_m^i C_m^j}{C_{2m}^{i+j}}$$

注:(1)若把式(15)换成椭球片的参数方程, 则可得相应椭球片的张量积参数 Bézier 多项式逼近。

$$K_x = (k_{0,x}, k_{1,x}, \dots, k_{m,x})^T, K_y = (k_{0,y}, k_{1,y}, \dots, k_{m,y})^T$$

(2)若取  $\alpha=0, \beta=2\pi, \xi=0, \eta=\pi$  时, 则由式(24)即可得到整个球面的多项式逼近。

$$k_{j,x} = \int_0^1 \cos[\xi + (\eta - \xi)v] B_j^n(v) dv, j = 0, 1, \dots, m$$

$$k_{j,y} = \int_0^1 \sin[\xi + (\eta - \xi)v] B_j^n(v) dv, j = 0, 1, \dots, m$$

### 4 逼近误差

$$Q_h = \begin{pmatrix} q_{0,0}^h & q_{0,1}^h & \dots & q_{0,m-1}^h & q_{0,m}^h \\ q_{1,0}^h & q_{1,1}^h & \dots & q_{1,m-1}^h & q_{1,m}^h \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{n-1,0}^h & q_{n-1,1}^h & \dots & q_{n-1,m-1}^h & q_{n-1,m}^h \\ q_{n,0}^h & q_{n,1}^h & \dots & q_{n,m-1}^h & q_{n,m}^h \end{pmatrix}, h=x,y,z$$

定义

$$\varepsilon_L(u) = \left| \sqrt{P_x^2(u) + P_y^2(u)} - 1 \right| \quad (25)$$

为用多项式  $P(u)$  逼近圆弧曲线段  $L$  时的误差函数, 本文用线段  $L$  的最大误差  $\max_{0 \leq u \leq 1} \varepsilon_L(u)$  来衡量逼近的效果, 实际计算时, 一般在  $[0, 1]$  上取一些点, 并把这些点处的函数值最大者作为  $\max_{0 \leq u \leq 1} \varepsilon_L(u)$ 。对球面曲面片的处理也与之相类似。

$$L_z = \left( \int_0^1 B_0^n(u) du, \int_0^1 B_1^n(u) du, \dots, \int_0^1 B_m^n(u) du \right)^T$$

$$= \left( \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1} \right)^T$$

### 5 数值实例

因为  $B_0^n(v), B_1^n(v), \dots, B_m^n(v)$  线性无关, 所以矩阵  $C$  为可逆方阵, 由式(22)可得由逼近曲面  $Q(u,v)$  的控制顶点的 3 个分量构成的 3 个矩阵  $Q_x, Q_y$  和  $Q_z$ , 它们分别为

本节中,  $\varepsilon$  表示根据第 4 节中规定所计算出的逼近误差, 曲线时取 1001 个样本点, 曲面时取 10201 个样本点。

$$Q_x = A^{-1} L_x K_x^T C^{-1}, Q_y = A^{-1} L_y K_y^T C^{-1}, Q_z = A^{-1} L_z K_z^T C^{-1} \quad (23)$$

图 1 为根据式(14)所得到的圆弧曲线段和圆的不同次数的 Bézier 多项式逼近曲线。

仿照第 2 节中的推导过程, 并利用  $BA^{-1}L_z \equiv -1$  (根据逆矩阵与伴随矩阵的关系以及 Laplace 展开定理可得), 可将逼近曲面  $Q(u,v)$  的 3 个分量用矩阵表示为

图 2 为根据式(24)所得到的球面曲面片和球面的不同次数的张量积 Bézier 多项式逼近的曲面。

$$\begin{cases} Q_x(u,v) = \frac{\det A_x \det C_y}{\det A \det C} \\ Q_y(u,v) = \frac{\det A_y \det C_x}{\det A \det C} \\ Q_z(u,v) = -\frac{\det C_x}{\det C} \end{cases} \quad (24)$$

图 3(a)为椭圆  $\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$  的 12 次 Bézier 多项式逼近曲线, 图 3(b)为椭球面  $\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 + \left(\frac{z}{3}\right)^2 = 1$  的  $9 \times 9$  次张量积 Bézier 多项式逼近曲面。

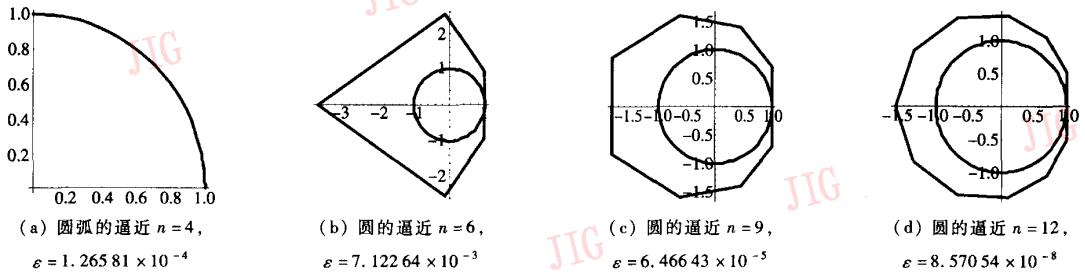


图 1 圆弧曲线段和圆的多项式逼近

Fig. 1 The polynomial approximation to the circular arc and the circle

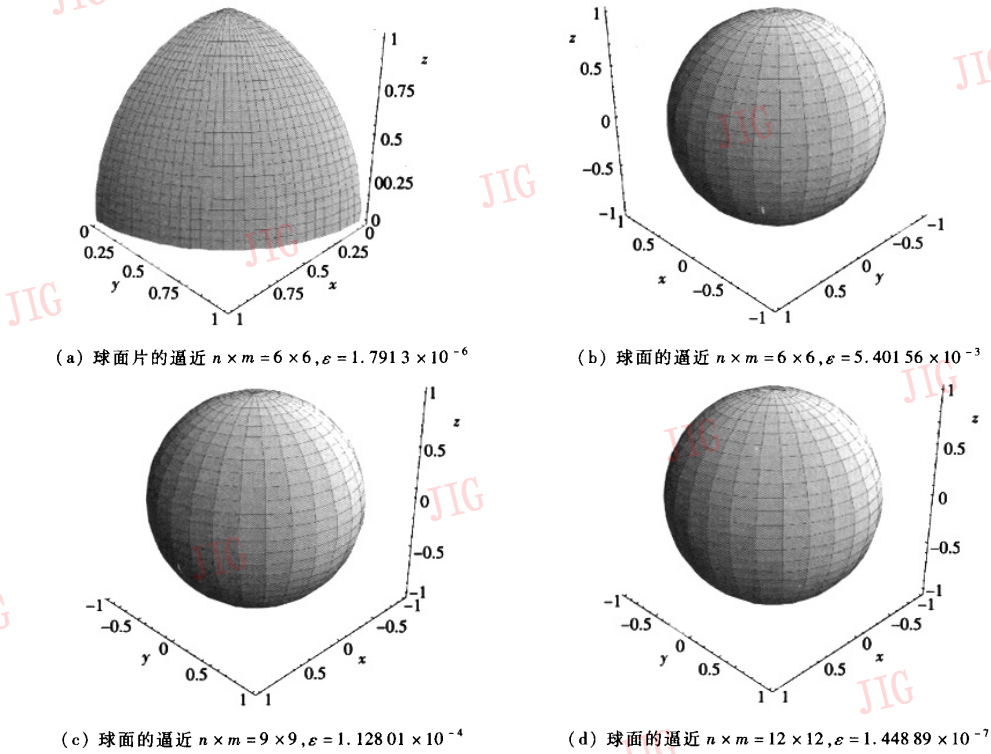


图 2 球面曲面片和球面的多项式逼近

Fig. 2 The polynomial approximation to the spherical surface and the sphere

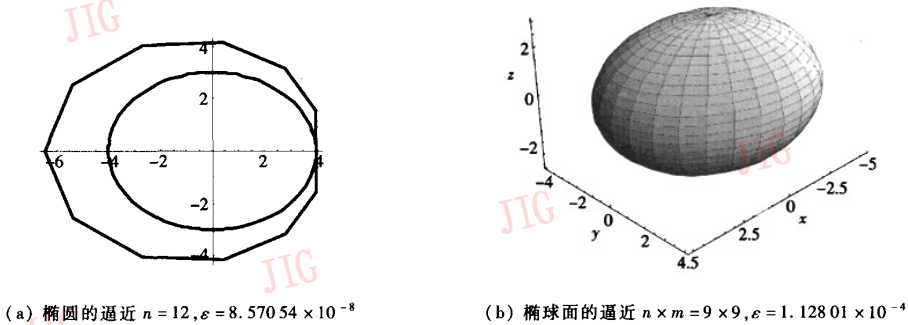


图 3 椭圆和椭球面的多项式逼近

Fig. 3 The polynomial approximation to the ellipse and the ellipsoidal surface

## 6 结 论

本文利用在最小二乘范数下所定义的距离函数取最小值来得到圆弧曲线段和圆以及球面曲面片和球面的多项式逼近式,并把逼近式表示成行列式的商,用于进行圆弧曲线和球面曲面片的逼近。本文的意义在于:(1)首次用一片张量积参数 Bézier 多项式曲面片逼近整个球面,并获得成功;(2)用一段参数 Bézier 多项式曲线段逼近整圆,所得到的逼近曲线整体上达到  $C^\infty$  连续;(3)用本文方法所存储的数据量较少,例如 Morken 用 64 段二次参数 Bézier 多项式曲线段去逼近圆<sup>[12]</sup>,精度可达到  $3.6 \times 10^{-7}$ ,其需存储的数据点为 128 个、基函数为 3 个,逼近曲线整体达到  $C^1$  连续;而本文用一段 12 次参数 Bézier 多项式曲线段来逼近圆,精度达到  $8.57054 \times 10^{-8}$ ,其需存储的数据点仅为 13 个、基函数为 13 个,逼近曲线整体可达到  $C^\infty$  连续;但本文方法也存在不足之处,由于曲线曲面次数较高,且曲线曲面的控制顶点为两行列式之商,这些行列式的元素均为形如  $\int_0^1 B_i^n(t) \sin(\xi t) dt$  与  $\int_0^1 B_i^n(t) \cos(\xi t) dt$  的积分(其中  $B_i^n(t)$  为 Bernstein 基函数,  $\xi$  为常数),所以本文方法的计算较文献[10,12]中方法繁杂。例如:用本文和文献[10,12]中的方法可生成精度为  $10^{-7}$  的单位圆,在同一台 PC 机上用 Mathematic 5.0 编程实现 3 种方法所需时间大约分别为 120s、60s、40s。因此如何简化本文算法、提高计算速度将是需要进一步考虑的问题。

### 参考文献 (References)

- 1 Fan Jin-song, An Jun, Xu Zong-jun. Cubic NURBS representation of arc and circle[J]. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 1997, 9(5): 391 ~ 395. [范劲松,安军,徐宗俊. 用三次 NURBS 表示圆弧与整圆的算法研究[J]. *计算机辅助设计与图形学报*, 1997, 9(5): 391 ~ 395.]
- 2 Shou Hua-hao, WANG Guo-jin. Rational quartic Bernstein basis representation of circular arcs[J]. *Applied. Mathematics A Journal of Chinese Universities*, 1998, 13(2): 233 ~ 238. [寿华好,王国瑾. 圆弧曲线的有理四次 Bernstein 表示[J]. *高校应用数学学报 A 辑(中文版)*, 1998, 13(2): 233 ~ 238.]
- 3 Chen Qin-yu, Wang Guo-zhao. Representation of arc with C-Bézier curve[J]. *Journal of Software*, 2002, 13(11): 2155 ~ 2161. [陈秦玉,汪国昭. 圆弧的 C-Bézier 曲线表示[J]. *软件学报*, 2002, 13(11): 2155 ~ 2161.]
- 4 Wang Guo-jin, Wang Guo-zhao. The rational cubic Bézier representation of conics[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 1992, 9(6): 447 ~ 455.
- 5 Qin Kai-hua, Guan You-jiang. Representing circular arcs by NURBS of degree three[J]. *Chinese Journal Computer*, 1995, 8(2): 146 ~ 152. [秦开怀,关右江. 圆弧曲线的三次 NURBS 表示[J]. *计算机学报*, 1995, 8(2): 146 ~ 152.]
- 6 Li Qiang, Xi Guang, Wang Shang-jin. Some practical approaches of representing circular arcs with NURBS[J]. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 1999, 11(5): 467 ~ 469. [李强,席光,王尚锦. NURBS 表示圆弧曲线的实用方法[J]. *计算机辅助设计与图形学报*, 1999, 11(5): 467 ~ 469.]
- 7 Hu Jin-yan, Wang Ren-hong. Approaches of representing circular arcs with NURBS of degree two[J]. *Journal of Dalian University of Technology*, 2001, 41(6): 640 ~ 643. [胡金燕,王仁宏. 基于 NURBS 的圆弧曲线的表示方法[J]. *大连理工大学学报*, 2001, 41(6): 640 ~ 643.]
- 8 Han ming, Kong Ya-zhou, Dong Yang-bin, et al. Expressing method for the secondary NURBS circular curve[J]. *Journal of Huazhong University of Science and Technology*, 2001, 29(12): 37 ~ 39. [韩明,孔亚洲,董杨斌等. 圆弧曲线的二次 NURBS 表示方法研究[J]. *华中科技大学学报(自然科学版)*, 2001, 29(12): 37 ~ 39.]
- 9 Liu Shu, Chen Yu-jian, Sun Jia-guang. Method for analyzing parametrization of rational Bézier curves representing circular arcs with degree three/four[J]. *Journal of Tsinghua University (Science and Technology)*, 2003, 43(1): 112 ~ 115. [刘书,陈玉健,孙家广. 有理三次/四次 Bézier 圆弧曲线参数化的分析方法[J]. *清华大学学报(自然科学版)*, 2003, 43(1): 112 ~ 115.]
- 10 Goshtasby A. Ardeshtir. Parametric circles and spheres[J]. *Computer Aided Design*, 2003, 35(5): 487 ~ 494.
- 11 Mo Guo-ru, Li Kai-di. The Meyhod of Function Approximation[M]. Beijing: Academic Press, 2003: 123 ~ 138. [莫国瑞,刘开第. 函数逼近论方法[M]. 北京:科学出版社, 2003: 123 ~ 138.]
- 12 Morken K. Best approximation of circle segments by quadratic curves [A]. In: Laurnt P J, Le Méhauté A, Schumaker L L., editors. *Curves and Surfaces*[M]. New York: Academic Press, 1991: 331 ~ 336.